Geoscience Research Laboratory Co., Ltd.
Technical Report
TR No.47_4

カルマンフィルタを用いた３次元有限要素法による逆解析（４）

地下水流れの逆解析では、観測された地下水位変化より透水性などを推定します。ここでは、安定した収束性が期待できるカルマンフィルタを３次元有限要素法と組み合わせた手法を紹介します。

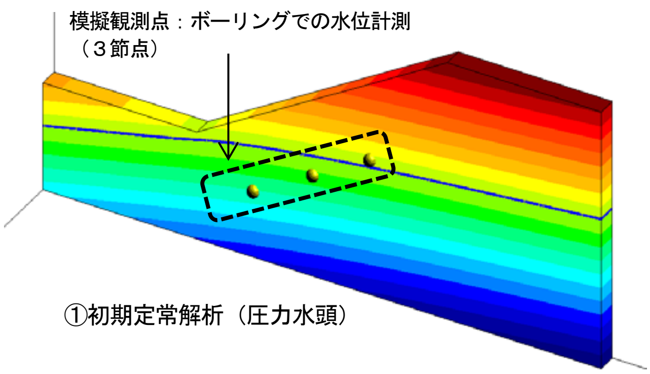
有限要素解析には、飽和・不飽和浸透流解析を用います。

逆解析による透水係数と水位の推定

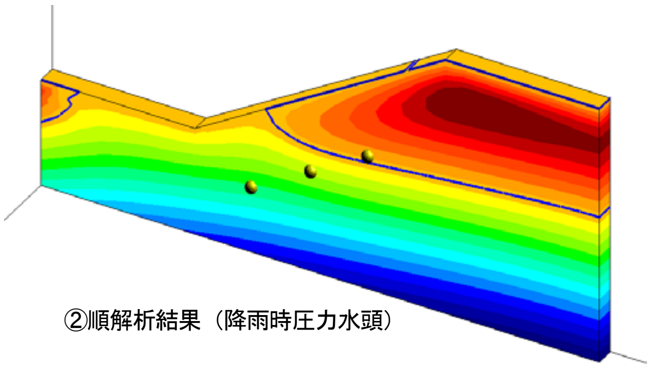
斜面における降雨時の水位変化を例にとって、観測値から透水係数を逆解析により求めてみます。

- 観測値を設定するため、浸透流解析で順解析を行います(右図①)。ボーリングで行われた水位計測を模擬観測点(右図①枠内の節点)とします。
- 定常解析後に、モデル上面に降雨浸透を設定し非定常解析を行い、模擬観測点での圧力水頭を求め観測値としました。これを用いた逆解析では、初期透水係数として順解析に用いた値の 1/10 の値を用いました。
- 逆解析の結果を右図③に示します。順解析で得られた圧力水頭の分布が再現されています(図中の青線は地下水位)。降雨時の最下観測点における全水頭の変化を下図④に示します。透水係数の推定値が正解に近づいていくことがわかります。

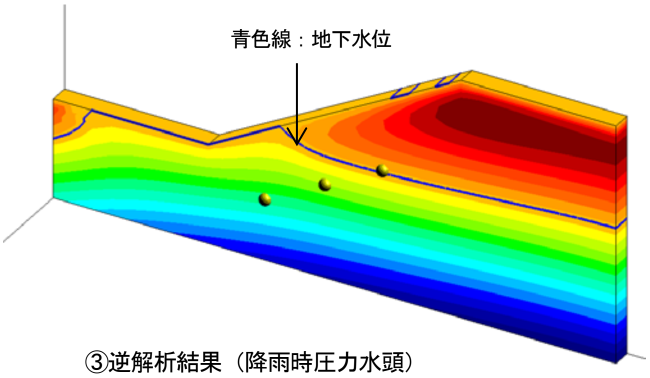
このように、逆解析を用いることで、透水係数と地下水位の分布を推定することができます。



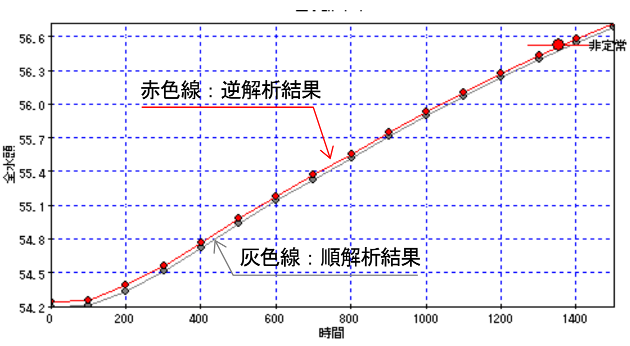
①初期定常解析（圧力水頭）



②順解析結果（降雨時圧力水頭）



③逆解析結果（降雨時圧力水頭）



④最下観測点の全水頭変化（降雨時）

カルマンフィルタを用いた地下水流れの逆解析

k 回目の観測において、観測値 $\boldsymbol{y}_k$ が状態 $\boldsymbol{x}_k$ と次のような関係があり、また状態は次のような変動をするものとします（状態空間モデル）。

（観測方程式）

$$\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}_k$$

（状態方程式）

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{w}_k$$

ここに、$\boldsymbol{A}_k$ は観測行列、$\boldsymbol{v}_k$ は観測ノイズ、$\boldsymbol{w}_k$ はシステムノイズとします。

地下水流れ（浸透流）の問題では有限要素方程式が次のような形をとります。

$$\boldsymbol{Kh} + \boldsymbol{F}\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial t} = \boldsymbol{d}$$

ここに、$\boldsymbol{h}$ は全水頭ベクトル、$\boldsymbol{F}$ は貯留項からなる行列、$\boldsymbol{d}$ は湧出や浸透などに関するベクトル、$\boldsymbol{K}$ は透水係数からなる行列です。

浸透流の有限要素方程式を書き換えて。観測方程式を作ります。

$$\boldsymbol{g}_k = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{v}_k$$

左辺は計測点における観測値 $\boldsymbol{g}_k$ であり，右辺は観測値を状態変数（透水係数）で表した関数で非線形となります。このままではカルマンフィルタにあてはめることができないため線形化を施します。まず、非線形関数 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{k-1}$ まわりで Taylor 展開し 2 次項以降を無視し、

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{k-1}) + \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{k-1}} (\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_{k-1})$$

新しい観測値として次式を定義すれば、最終的に観測方程式ができあがります。

$$\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{g}_k - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{k-1}) + \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{k-1}} \boldsymbol{x}_{k-1}$$

$$\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{x}_{k-1} + \boldsymbol{v}_k, \quad \boldsymbol{A}_k = \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{k-1}}$$

$\boldsymbol{A}_k$ を求めるため、浸透流の有限要素方程式を時間について差分を取ると、次式となります。

$$\boldsymbol{Kh}_k + \boldsymbol{F}\frac{\boldsymbol{h}_k - \boldsymbol{h}_{k-1}}{\Delta t} = \boldsymbol{d}_k$$

$$\therefore \left(\boldsymbol{K} + \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{F}\right)\boldsymbol{h}_k = \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{F}\boldsymbol{h}_{k-1} + \boldsymbol{d}_k$$

状態変数 $\boldsymbol{x}_k$ に依存する変数は、$\boldsymbol{K}$ と $\boldsymbol{h}_k$ 、$\boldsymbol{h}_{k-1}$ であるため、$\boldsymbol{x}_k$ について微分をとります。

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)_{k-1}\boldsymbol{h}_k + \left(\boldsymbol{K} + \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{F}\right)\frac{\partial \boldsymbol{h}_k}{\partial \boldsymbol{x}_{k-1}} = \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{F}\frac{\partial \boldsymbol{h}_{k-1}}{\partial \boldsymbol{x}_{k-1}}$$

$$\therefore \left(\boldsymbol{K} + \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{F}\right)\frac{\partial \boldsymbol{h}_k}{\partial \boldsymbol{x}_{k-1}} = -\left(\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)_{k-1}\boldsymbol{h}_k + \frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{F}\frac{\partial \boldsymbol{h}_{k-1}}{\partial \boldsymbol{x}_{k-1}}$$

この方程式を解くことで、$\boldsymbol{A}_k$ が求まります。これで観測方程式が得られ、カルマンフィルタによって状態変数（透水係数）を推定することができます。

https://www.geolab.jp　お問い合わせは　chisouken@geolab.jp

GEOSCIENCE RESEARCH LABORATORY

株式会社　地層科学研究所

本　　社　〒242-0017　神奈川県大和市大和東 3-1-6 JM ビル 4F　Tel. 046-200-2281

東京事務所　〒112-0004　東京都文京区後楽 2-3-25 金子ビル 6F　Tel. 03-5842-7677

大阪事務所　〒532-0011　大阪市淀川区西中島 5-7-19 第 7 新大阪ビル 301 号　Tel. 06-6886-7774